

ФАХОВИЙ КОЛЕДЖ РАКЕТНО-КОСМІЧНОГО МАШИНОБУДУВАННЯ
ДНІПРОВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ імені ОЛЕСЯ ГОНЧАРА

МЕТОДИЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ САМОСТІЙНИХ ЗАНЯТЬ

дисципліна «Математичний аналіз»
спеціальність 121 Інженерія програмного забезпечення
освітньо-професійна програма Розробка програмного забезпечення

Дніпро

2023

План самостійного вивчення теми № 1

з навчальної дисципліни Математичний аналіз

Тема Неперервність функції та точки розриву

Мета ознайомити студентів з поняттям неперервності функції, точками розриву, правилом обчислення границь функції за допомогою неперервності, формувати вміння використовувати теореми про неперервність функції для розв'язування завдань.

знати: означення та види точок розриву,

вміти: знаходити границі функції за допомогою неперервності

Час 4 години

Література

1. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 1. – 295 с.

Навчальні матеріали до самостійного вивчення теми

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в точці x_0 та в деякому околі цієї точки.

Означення. Функція $y = f(x)$ називається неперервною в точці x_0 , якщо існує границя функції в цій точці і ця границя дорівнює значенню функції в цій точці, тобто

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

або $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) = f(x)$.

Легко бачити, що наведені вище рівняння будуть виконуватись при одночасному виконанні наступних трьох умов:

- 1) функція $y = f(x)$ визначена в точці x_0 та в деякому околі цієї точки;
- 2) функція $y = f(x)$ в точці x_0 має границю;
- 3) границя функції в цій точці дорівнює значенню функції в цій точці.

Означення. Функція $y = f(x)$ називається неперервною на проміжку, якщо вона неперервна в кожній точці цього проміжку.

Основні теореми про неперервні функції

Теорема. Для того, щоб визначена в точці x та деякому околі цієї точки функція $y = f(x)$ була неперервною в цій точці необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x + \Delta x) - f(x)) = 0.$$

Доведення.

- 1) Доведемо необхідну умову.

Нехай в точці x функція $y = f(x)$ буде неперервною, тоді виконується умова

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) = f(x).$$

Маємо $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) - f(x) = 0;$
 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x + \Delta x) - f(x)) = 0;$

Необхідна умова доведена.

2) Доведемо достатню умову.

Нехай виконується умова

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x + \Delta x) - f(x)) = 0.$$

Маємо $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) - f(x) = 0;$
 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) = f(x).$

Достатня умова доведена.

Зауваження. Часто наведену теорему приймають як означення неперервності функції f в точці x . В цьому випадку приведені вище означення буде відігравати роль теореми..

Теорема. Якщо в точці x_0 функція неперервна, то $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x).$

Доведення. Якщо в точці x_0 функція неперервна, то $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$

Беручи до уваги співвідношення $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$, одержимо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x).$

Теорема доведена.

Зауваження. Згідно даної теореми маємо просте правило знаходження границі неперервної в точці x функції: щоб знайти границю неперервної в точці x функції при $x \rightarrow x_0$ достатньо у вираз функції підставити замість аргументу x його значення x_0 .

Теорема. Алгебраїчна сума, добуток і відношення двох неперервних функцій є функція неперервна (для відношення за винятком тих значень аргументу, в яких дільник дорівнює нулю).

Доведення. Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені на деякому проміжку і неперервні в точці x_0 цього проміжку. Доведемо, наприклад, неперервність добутку $F(x) = f(x)g(x).$

Використовуючи теорему про границю добутку, маємо

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f(x_0)g(x_0) = F(x_0)$$

Тобто $\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = F(x_0) \Rightarrow$ функція $F(x)$ неперервна.

Неперервність суми та відношення двох функцій доводяться аналогічно

Теорема. Нехай функція $u = \varphi(x)$ неперервна у точці x_0 , а функція $y = f(u)$ неперервна у точці $u_0 = \varphi(x_0)$. Тоді складена функція $y = f(u(x))$ буде неперервною у точці x_0 .

Доведення. В силу неперервності функції $u = \varphi(x)$ маємо $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) = u_0$

тобто при $x \rightarrow x_0$ змінна $u \rightarrow u_0$.

В силу неперервності функції $y = f(u)$ маємо $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = f(u_0)$

Тоді $\lim_{x \rightarrow x_0} f(\varphi(x)) = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = f(u_0) = f(\varphi(x_0))$

Це і доводить, що складена функція $y = f(u(x))$ буде неперервною у точці x_0 .

Зауваження. Елементарною називається функція, яку можна представити у вигляді формули, що має скінчене число арифметичних дій і суперпозицій (операція взяття функції від функції) основних елементарних функцій. А тому із приведених вище теорем випливає, що будь-яка елементарна функція неперервна в кожній точці, в якій вона визначена. Цей важливий висновок дозволяє легко знаходити границі елементарних функцій в точках, де вони визначені, а саме, шукані границі будуть дорівнювати значенню функції в заданій точці.

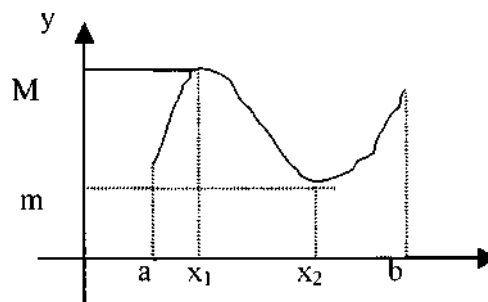
Приклад. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 2} 2^{3x+1}$.

Розв'язування. Оскільки в точці $x = 2$ функція $y = 2^{3x+1}$ неперервна, то $\lim_{x \rightarrow 2} 2^{3x+1} = \lim_{x \rightarrow 2} 2^{3 \cdot 2 + 1} = 2^7 = 128$.

Основні властивості функцій, неперервних на відрізку.

Розглянемо деякі властивості функцій, неперервних на відрізку. Ці властивості будуть сформульовані у вигляді теорем, які ми приведемо без доведення.

Теорема (Вейерштраса). Якщо функція неперервна на відрізку, то вона приймає на цьому відрізку своє найбільше та найменше значення. Геометричне тлумачення теореми.



Неперервна на $[a; b]$ функція $y = f(x)$ приймає найбільше значення M в точці x_1 , а найменше m – в точці x_2 . Для будь-якого $x \in [a; b]$ має місце нерівність $m < f(x) < M$.

Зауваження. Твердження теореми про існування найбільшого та найменшого значень може бути невірним, якщо функція задана на $(a; b)$.

Теорема. Якщо функція неперервна на відрізку, то вона обмежена на цьому відрізку.

Теорема (Больцано-Коші). Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і приймає на кінцях нерівні значення $f(a) = A \neq f(b) = B$, то на цьому відрізку вона приймає всі проміжні значення між A та B .

Зауваження. Якщо функція на кінцях приймає значення різних знаків, то на інтервалі існує хоча б одна точка x_0 , в якій функція дорівнює нулю $f(x_0) = 0$.

Точки розриву функції та їх класифікація

Точки, в яких порушується неперервність функції, називаються точками розриву функції. Якщо x_0 – точка розриву функції $y = f(x)$, то в цій точці принаймні не виконується одне із трьох умов означення неперервності функції, а саме:

- 1) функція $y = f(x)$ визначена в околі точки x_0 , але не визначена в самій точці;
- 2) функція $y = f(x)$ визначена в точці x_0 , в деякому околі цієї точки, але в точці x_0 не має границі;
- 3) функція $y = f(x)$ визначена в точці x_0 , в деякому околі цієї точки, в точці x_0 має границю, але границя функції в цій точці не дорівнює значенню функції в цій точці.

Означення. Точка розриву x_0 називається точкою розриву першого роду функції $y = f(x)$, якщо в цій точці існують скінченні односторонні границі функції, але вони не співпадають, тобто

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A_1 < \infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A_2 < \infty; \quad A_1 \neq A_2.$$

Означення. Точка розриву x_0 називається точкою розриву другого роду функції $y = f(x)$, якщо в цій точці принаймні одна із односторонніх границь функції не існує або дорівнює нескінченності.

Означення. Точка розриву x_0 називається усувною точкою розриву функції $y = f(x)$, якщо в цій точці існують скінченні односторонні границі функції, вони співпадають (тобто існує границя функції), але не дорівнюють значенню функції в цій точці, тобто

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0).$$

Питання та завдання до контролю знань студентів

1. Дайте означення неперервності функції.
2. Назвіть теореми про неперервність функції.
3. Назвіть основні властивості функцій, неперервних на відрізку.
4. Дайте означення точки розриву функції.
5. Назвіть класифікацію точок розриву.

План самостійного вивчення теми № 2

з навчальної дисципліни Математичний аналіз

Тема Правило Лопіталя

Мета ознайомити студентів з правилом Лопіталя, сформулювати вміння знаходити границі функції за допомогою правила

знати: похідні функції, правила знаходження границі функції

вміти: знаходити границі функції за допомогою правила Лопіталя

Час 4 години

Література

1. Дюженкова, Л.І. Математичний аналіз у задачах і прикладах Ч.1. [Текст] : навчальний посібник /Л.І.Дюженкова, Т.В. Колесник, М.Я. Лященко. – Київ: Вища школа, 2002 р., - 462 с.

Навчальні матеріали до самостійного вивчення теми

Якщо треба знайти границю частки $f(x)/\varphi(x)$, коли границі чисельника і знаменника дорівнюють нулю, чи показати, що вона не існує, то кажуть, що треба розкрити невизначеність типу $\frac{0}{0}$. Аналогічно розуміють слова розкрити невизначеність типу $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞ , 0^0 і ∞^0 .

Правило Лопіталя (розкриття невизначеностей типу $\frac{0}{0}$ і $\frac{\infty}{\infty}$). Нехай:

1) функції f і φ диференційовні в інтервалі $I = (a; b)$ за винятком, можливо, точки x_0 , яка є граничною для I , $|x_0| \leq +\infty$, $\varphi'(x) \neq 0$, $x \neq x_0$;

2) $\lim_{I \ni x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{I \ni x \rightarrow x_0} \varphi(x) = a$, де $a = 0$ або $a = \infty$;

3) існує $\lim_{I \ni x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = b$, $|b| \leq \infty$. Тоді існує

$$\lim_{I \ni x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{I \ni x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Розкриття невизначеностей інших типів можна звести до розкриття невизначеностей типу $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$ за допомогою таких перетворень:

$$0 \cdot \infty \Rightarrow f(x)\varphi(x) = \frac{f(x)}{\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)} \Rightarrow \frac{0}{0};$$

$$\infty - \infty \Rightarrow f(x) - \varphi(x) = \frac{\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\varphi(x)}} \Rightarrow \frac{0}{0};$$

$$1^\infty \Rightarrow (f(x))^{\varphi(x)} = e^{\varphi(x)\ln f(x)} \Rightarrow 0 \cdot \infty;$$

$$0^0 \Rightarrow (f(x))^{\varphi(x)} = e^{\varphi(x)\ln f(x)} \Rightarrow 0 \cdot \infty;$$

Пряму $y = kx + b$ називають *похилою асимптотою* або просто *асимптотою* кривої $y = f(x)$, якщо $f(x) - (kx + b) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$ або $x \rightarrow -\infty$.

Пряму $x = x_0$ називають *вертикальною асимптотою* кривої $y = f(x)$, якщо $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = \infty$ або $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = \infty$.

Критерій похилої асимптоти. Пряма $y = kx + b$ буде похилою асимптотою кривої $y = f(x)$ тоді і тільки тоді, коли $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ і $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx)$ або $k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ і $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx)$.

Зразки розв'язування задач

1. 2) Розглянемо $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$ і $\varphi(x) = x$. Ці функції диференційовні в околі точки $x_0 = 0$, причому $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $f'(0) = 0$ і $\varphi'(x) = 1$ того, $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = x \sin \frac{1}{x} \rightarrow 0$, $x \rightarrow 0$, але $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ не має границі в околі $x_0 = 0$. Отже, задане твердження неправильне.

2. 3) Маємо розкрити невизначеність типу $\frac{0}{0}$. За правилом Лопіталя функція, що знаходиться в чисельнику, має бути диференційовною в деякому проколеному околі точки $x_0 = 0$, але в умові задачі не йдеться про це. Отже, правило Лопіталя застосувати не можна. Разом з тим

$$\begin{aligned} \frac{f(a+x) - f(a-x)}{2x} &= \frac{f(a+x) - f(a)}{2x} + \frac{f(a) - f(a-x)}{2x} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{f(a+x) - f(a)}{x} + \frac{f(a-x) - f(a)}{-x} \right) \rightarrow \frac{1}{2} (f'(a) + f'(a)) = f'(a), \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

3. 5) Треба розкрити невизначеність типу $\frac{0}{0}$, де

$$f(x) = \arcsin 2x - 2\arcsin x, \quad \varphi(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\varphi'(x) = 3x^2 \Rightarrow \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \frac{\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2} = \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}.$$

При $x \rightarrow 0$ останній вираз також вимагає розкриття невизначеності типу $\frac{0}{0}$. Маємо

$$f_1'(x) = 2 \left(\frac{8x}{2} (1-4x^2)^{-\frac{3}{2}} - \frac{2x}{2} (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \right) = 2x \left(\frac{4}{(1-4x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \right),$$

$$\varphi_1'(x) = 6x \Rightarrow \frac{f_1'(x)}{\varphi_1'(x)} = \frac{1}{3} \left(\frac{4}{(1-4x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \rightarrow 1, \quad x \rightarrow 0.$$

Звідси за правилом Лопіталя

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_1'(x)}{\varphi_1'(x)} = 1$$

і за тим самим правилом

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3} = 1.$$

5. 26) Функція $y = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - x}$ визначена на множині $(-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$. Ос-

скільки знаменник дорівнює нулю у точках $x = 0$ і $x = 1$, то можливими вертикальними асимптотами є прямі $x = 0$ і $x = 1$. Проте за правилом Лопіталя

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3}{2x - 1} = 0.$$

Отже, пряма $x = 1$ не є асимптотою кривої $y = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - x}$.

Оскільки $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - x} = \infty$, то пряма $x = 0$ є вертикальною асимптотою кривої.

Скористась критерієм похилої асимптоти:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2} = \frac{1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}}{1 - \frac{1}{x}} \rightarrow 1, \quad x \rightarrow \infty \Rightarrow k = 1;$$

$$f(x) - kx = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - x} - x = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x} = \frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} \rightarrow 1,$$

$x \rightarrow \infty \Rightarrow b = 1 \Rightarrow y = x + 1$ — похила асимптота кривої.

Завдання для розв'язування

3. Знайти дані границі:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$; 3) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{\operatorname{ctg} x} - \frac{\pi}{2 \cos x} \right)$;

4) $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$; 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2 \arcsin x}{x^3}$; 6) $\lim_{x \rightarrow 0+} x^\alpha \ln x, \alpha > 0$;

7) $\lim_{x \rightarrow 1-} \ln x \cdot \ln(1 - x)$; 8) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a}, a > 0$; 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right)$;

10) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right)$; 11) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\pi - 2 \operatorname{arctg} x) \ln x$; 12) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$;

13) $\lim_{x \rightarrow 0+} x^x$; 14) $\lim_{x \rightarrow 0+} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^x$; 15) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} (\operatorname{tg} x)^{\sin 2x}$; 16) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$;

17) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 10^x)^{\operatorname{tg} x}$; 18) $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x - \operatorname{cosec} x)$; 19) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\operatorname{ctg} x}$;

20) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\ln(1-x)}$; 21) $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^x$; 22) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \left(\frac{\pi}{2} - x \right)}{\ln \cos x}$;

План самостійного вивчення теми № 3

з навчальної дисципліни *Математичний аналіз*

Тема **Інтегрування раціональних функцій**

Мета Ознайомитись з поняттям раціональної функції та основним правилом її інтегрування

знати: означення та види раціональних функцій

вміти: знаходити інтеграл раціональної функції

Час 4 години

Література

1. Дюженкова, Л.І. Математичний аналіз у задачах і прикладах Ч.1. [Текст] : навчальний посібник /Л.І.Дюженкова, Т.В. Колесник, М.Я. Лященко. – Київ: Вища школа, 2002 р., - 462 с.

Навчальні матеріали до самостійного вивчення теми Інтегрування раціональних функцій

До найпростіших раціональних функцій належать:

1) $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ ($n \in \mathbb{N}$, a_i , $i = \overline{0, n}$, — задані дійсні числа) — ціла раціональна функція або многочлен;

2) $f(x) = \frac{A}{(x-a)^n}$, $n \in \mathbb{N}$, A, a — задані дійсні числа;

3) $f(x) = \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$ $n \in \mathbb{N}$, A, B, p, q — задані дійсні числа, $p^2 - 4q < 0$.

Раціональні функції 2), 3) називають ще елементарними раціональними дробами. Інтеграли від них визначають через елементарні функції або говорять, що вони беруться у скінченному вигляді.

Функцію $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, де P і Q — многочлени, називають *дробово-раціональною* або *раціональним дробом*. Якщо степінь многочлена P менший за степінь многочлена Q , то раціональний дріб називають правильним, в іншому разі — неправильним.

Якщо раціональний дріб неправильний, то діленням многочлена P на Q його можна подати у вигляді суми цілої раціональної функції (ціла частина) та правильного раціонального дробу, тобто

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

де многочлен T — частка, а многочлен R — остача від ділення.

Правильний нескоротний раціональний дріб можна подати, і притому єдиним способом, у вигляді суми скінченного числа елементарних раціональних дробів. На цьому ґрунтується метод інтегрування раціональних функцій.

Алгоритм інтегрування раціональної функції

1. Якщо дріб $\frac{P}{Q}$ неправильний, то треба поділити многочлен P на многочлен Q і виділити його цілу частину T та правильний нескоротний раціональний дріб $\frac{R}{Q}$.

2. Розкласти многочлен Q на лінійні множники, які відповідають його дійсним кореням, та квадратні множники, які відповідають його комплексним кореням.

3. Подати дріб $\frac{R}{Q}$ через суму елементарних раціональних дробів. Для цього:

а) кожному множнику вигляду $(x-a)^p$ поставити у відповідність суму з p доданків:

$$\frac{A_1}{(x-a)^p} + \frac{A_2}{(x-a)^{p-1}} + \dots + \frac{A_p}{x-a},$$

де $A_i, i = \overline{1, p}$, — дійсні числа, які називають невизначеними коефіцієнтами;

б) для кожного множника вигляду $(x^2 + px + q)^l, p^2 - 4q < 0$, скласти суму з l доданків:

$$\frac{B_1x + C_1}{(x^2 + px + q)^l} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + px + q)^{l-1}} + \dots + \frac{B_lx + C_l}{x^2 + px + q},$$

де $B_i, C_i, i = \overline{1, l}$, — невизначені коефіцієнти.

4. Здобути суму елементарних дробів звести до спільного знаменника і прирівняти чисельник до многочлена R .

5. Знайти невизначені коефіцієнти із умови рівності двох многочленів. Цей метод відшукування невідомих коефіцієнтів називають методом невизначених коефіцієнтів.

6. Знайти $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ як суму інтегралів від многочлена T та елементарних раціональних дробів.

Зразки розв'язування задач

4. 17) Знайдемо інтеграл $I = \int \frac{x^{10} + x^9 - x^8 + x^7 - 2x^6 + 1}{x^4 + x^3 - x^2 + x - 2} dx$, застосувавши заданий вище алгоритм.

1. Підінтегральна функція є неправильним раціональним дробом, тому поділимо чисельник на знаменник і дістанемо

$$\frac{x^{10} + x^9 - x^8 + x^7 - 2x^6 + 1}{x^4 + x^3 - x^2 + x - 2} = x^6 + \frac{1}{x^4 + x^3 - x^2 + x - 2}.$$

2. Розкладемо знаменник правильного раціонального дробу на множники:

$$x^4 + x^3 - x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)(x^2+1)$$

3. Для множників $x-1$, $x+2$, x^2+1 запишемо відповідно доданки $\frac{A_1}{x-1}$, $\frac{B_1}{x+2}$, $\frac{C_1x+C_2}{x^2+1}$.

Отже, дістанемо таке задання здобутого правильного раціонального дробу через елементарні раціональні дробі:

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)(x^2+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{B_1}{x+2} + \frac{C_1x+C_2}{x^2+1}.$$

4. Зведемо праву частину останньої рівності до спільного знаменника:

$$\frac{A_1}{x-1} + \frac{B_1}{x+2} + \frac{C_1x+C_2}{x^2+1} = \frac{A_1(x+2)(x^2+1) + B_1(x-1)(x^2+1) + C_1x(x-1)(x+2) + C_2(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)(x^2+1)}.$$

5. Невизначені коефіцієнти знайдемо з умови рівності чисельників дробів, тобто

$$1 \equiv A_1(x+2)(x^2+1) + B_1(x-1)(x^2+1) + C_1x(x-1)(x+2) + C_2(x-1)(x+2).$$

Два многочлени тотожно рівні тоді й тільки тоді, коли вони при однакових значеннях x приймають рівні значення. Надаватимемо x таких значень, при яких праву частину тотожності підрахувати досить просто.

Дістанемо

$$\begin{cases} x = -2 & \begin{cases} -15B_1 = 1, \\ 6A_1 = 1, \\ 2A_1 - B_1 - 2C_2 = 1, \\ 2A_1 - 4B_1 + 2C_1 - 2C_2 = 1, \end{cases} \\ x = 1 & \\ x = 0 & \\ x = -1 & \end{cases}$$

$$\text{звідки } B_1 = -\frac{1}{15}, A_1 = \frac{1}{6}, C_2 = -\frac{3}{10}, C_1 = -\frac{1}{10}.$$

Отже,

$$\frac{x^{10} + x^9 - x^8 + x^7 - 2x^6 + 1}{x^4 + x^3 - x^2 + x - 2} = x^6 + \frac{1}{6(x-1)} - \frac{1}{15(x+2)} - \frac{x+3}{10(x^2+1)}.$$

6. Знайдемо заданий інтеграл

$$\begin{aligned} I &= \int \left(x^6 + \frac{1}{6(x-1)} - \frac{1}{15(x+2)} - \frac{x+3}{10(x^2+1)} \right) dx = \frac{x^7}{7} + \frac{1}{6} \ln|x-1| - \frac{1}{15} \ln|x+2| - \\ &- \frac{1}{20} \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} - \frac{3}{10} \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x^7}{7} + \frac{1}{6} \ln|x-1| - \frac{1}{15} \ln|x+2| - \frac{1}{20} \ln(x^2+1) - \frac{3}{10} \operatorname{arctg} x + C. \end{aligned}$$

5. 13) Масмо

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{x(x^n+a)} = \int \frac{x^{n-1}dx}{x^n(x^n+a)} = \int \frac{x^{n-1}dx}{x^n(y+\frac{a}{x^n})} = \int \frac{dy}{y(y+a)} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{y}{y+a} \right| + C = \frac{1}{na} \ln \left| \frac{x^n}{x^n+a} \right| + C. \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} x^n = y, \quad nx^{n-1}dx = dy, \\ x^{n-1}dx = \frac{1}{n}dy \end{array} \right|$$

6. 1) Виразимо функцію $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2(x-1)^2}$ через елементарні раціональні дробі:

$$\frac{ax^2 + bx + c}{x^2(x-1)^2} = \frac{A_1}{x^2} + \frac{A_2}{x} + \frac{B_1}{(x-1)^2} + \frac{B_2}{x-1}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \int \frac{ax^2 + bx + c}{x^2(x-1)^2} dx &= A_1 \int \frac{dx}{x^2} + A_2 \int \frac{dx}{x} + B_1 \int \frac{dx}{(x-1)^2} + B_2 \int \frac{dx}{x-1} = \\ &= -\frac{A_1}{x} + A_2 \ln|x| - \frac{B_1}{x-1} + B_2 \ln|x-1| + C. \end{aligned}$$

Останній вираз буде раціональною функцією тоді й тільки тоді, коли $A_2 = 0$ і $B_2 = 0$.

Виразимо невідомі A_2 і B_2 через коефіцієнти квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$. Для цього скористасьмося методом невизначених коефіцієнтів. Дістанемо

$$\frac{ax^2 + bx + c}{x^2(x-1)^2} = \frac{A_1(x-1)^2 + A_2x(x-1)^2 + B_1x^2 + B_2x^2(x-1)}{x^2(x-1)^2},$$

звідки

$$ax^2 + bx + c \equiv A_1(x-1)^2 + A_2x(x-1)^2 + B_1x^2 + B_2x^2(x-1).$$

Многочлени тотожно рівні тоді й тільки тоді, коли рівні їхні коефіцієнти при відповідних степенях x .

Маємо

$$\begin{cases} x^3 & A_2 + B_2 = 0, \\ x^2 & A_1 - 2A_2 + B_1 - B_2 = a, \\ x^1 & -2A_1 + A_2 = b, \\ x^0 & A_1 = c, \end{cases}$$

звідки $A_1 = c$, $A_2 = b + 2c$, $B_2 = -b - 2c$, $B_1 = a + b + c$.

Отже, $A_2 = B_2 = 0 \Leftrightarrow b + 2c = 0$ і $-b - 2c = 0$, тобто коли $b = -2c$. Таким чином,

первісна функції $\frac{ax^2 + bx + c}{x^2(x-1)^2}$ є раціональною функцією тоді й тільки тоді, коли $b = -2c$.

1) Знайти інтеграли:

$$\text{а) } \int (x+1)^3 dx; \quad \text{б) } \int \frac{(1-x)^2}{x} dx; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{x+1}; \quad \text{г) } \int \frac{dx}{(x-3)^5}; \quad \text{д) } \int (1-x)^{15} dx;$$

$$\text{е) } \int \frac{dx}{x^2+4}; \quad \text{є) } \int \frac{dx}{x^2-9}; \quad \text{ж) } \int \frac{dx}{1-x^2}; \quad \text{з) } \int \frac{xdx}{x+5}; \quad \text{и) } \int \frac{dx}{x(x-2)};$$

$$\text{і) } \int \frac{dx}{(x-1)(x-3)}; \quad \text{ї) } \int \frac{dx}{1-2x+x^2}; \quad \text{й) } \int \frac{dx}{x^2+2x+2}; \quad \text{к) } \int \frac{x^2 dx}{x^2+4};$$

$$\text{л) } \int \frac{d(x^2+4)}{x^2+4}; \quad \text{м) } \int \frac{x+1}{x^2-16} dx; \quad \text{н) } \int \frac{xdx}{1+x^4}; \quad \text{о) } \int \frac{x^2+2}{x^2-1} dx.$$

4. Знайти дані інтеграли:

1) $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} dx$; 2) $\int \frac{dx}{(ax+b)^n}$, $n \in \mathbf{N}$, $a, b \in \mathbf{R}$; 3) $\int \frac{x^2 dx}{(x+2)^2 (x+4)^2}$;

4) $\int \frac{(x^2+1)dx}{x^3-3x^2+3x-1}$; 5) $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2} dx$; 6) $\int \frac{(x^3+1)dx}{x^3-5x^2+6x}$;

7) $\int \frac{(x+4)dx}{x^3+6x^2+11x+6}$; 8) $\int \frac{dx}{x^3+1}$; 9) $\int \frac{dx}{x^4-1}$;

10) $\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$; 11) $\int \frac{x dx}{x^3-1}$; 12) $\int \frac{dx}{x^3+x}$;

13) $\int \frac{2x^5-2x+1}{1-x^4} dx$; 14) $\int \frac{x^2 dx}{x^4+5x^2+4}$; 15) $\int \frac{x^4 dx}{x^4-2x^2+1}$; 16) $\int \frac{x^6 dx}{(x^2-1)^2}$;

План самостійного вивчення теми № 4

з навчальної дисципліни Математичний аналіз

Тема **Функціональні ряди**

Мета сформуванню у студентів поняття функціонального ряду, вміння досліджувати ряд на збіжність.

знати: означення та види функціональних рядів

вміти: досліджувати ряди на збіжність

Час 4 години

Література

1. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 3. – 275 с

Навчальні матеріали до самостійного вивчення теми

Нехай задано послідовність функцій

$$\{u_n(x)\} = \{u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots\},$$

кожна з яких визначена на деякій множині D .

Функціональним рядом називають вираз

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x).$$

Якщо у ряді зафіксувати $x \in x_0 \in D$, то функціональний ряд стане числовим. Цей ряд може збігатися або розбігатися. Якщо у точці x_0 числовий ряд збігається, то точку x_0 називають точкою збіжності функціонального ряду. Множину всіх значень x , для яких функціональний ряд збіжний, називають *областю його збіжності*. Область збіжності функціонального ряду не ширша від множини D , на якій визначені члени ряду.

Суму

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)$$

перших n членів ряду (2.1) називають n -ю частиною сумою цього ряду.

У кожній точці x , яка належить області збіжності, існує скінченна границя $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x)$, яку називають сумою ряду.

Якщо функціональний ряд збіжний до функції $S(x)$, то різницю $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$ називають n -м залишком ряду:

$$r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots.$$

У точках збіжності ряду залишок ряду при $n \rightarrow \infty$ прямує до нуля:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0.$$

Функціональний ряд називають *абсолютно збіжним*, якщо збігається ряд

$$|u_1(x)| + |u_2(x)| + \dots + |u_n(x)| + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|.$$

Для відшукування області абсолютної збіжності функціонального ряду використовують достатні ознаки збіжності числових рядів. Наприклад, за ознакою Д'Аламбера знаходять границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = l(x)$, після чого розв'язують нерівність $l(x) < 1$. Додатково проводять дослідження ряду в точках, для яких $l(x) = 1$. Аналогічно досліджують функціональний ряд і за радикальною ознакою Коші.

Рівномірна збіжність функціонального ряду

Функціональний ряд називають рівномірно збіжним на множині D , якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $N = N(\varepsilon)$, яке залежить від ε і не залежить від x , що для всіх $n > N$ і для всіх $x \in D$ виконується нерівність

$$|r_n(x)| < \varepsilon$$

Теорема 1 (ознака Вейєрштрасса). Функціональний ряд абсолютно і рівномірно збіжний на множині D , якщо існує такий знакододатний збіжний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, що для всіх $x \in D$ виконуються нерівності

$$|u_n(x)| \leq a_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

При цьому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називають *мажорантним* для ряду, а сам ряд називають *правильним збіжним* на множині D .

Теорема 2 (критерій Коші). Функціональний ряд збігається рівномірно на множині D тоді і тільки тоді, коли для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $N = N(\varepsilon)$ таке, що для всіх $n > N$, для будь-якого натурального p і для всіх $x \in D$ виконується нерівність

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon.$$

Властивості рівномірно збіжних рядів.

1. Якщо функціональний ряд рівномірно збіжний на деякому проміжку I і члени цього ряду — неперервні функції на I , то сума цього ряду є функція, неперервна на цьому проміжку.

2. Якщо функціональний ряд збіжний на проміжку I , його члени на цьому проміжку мають неперервні похідні $u'_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$), причому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ і рівномірно збіжний на проміжку I , то заданий ряд можна почленно диференціювати, тобто

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x), x \in I.$$

3. На будь-якому відрізку, що належить проміжку I рівномірної збіжності функціонального ряду, члени якого — неперервні функції на I , цей ряд можна почленно інтегрувати, тобто на проміжку $[\alpha; \beta] \in I$ виконується формула

$$\int_{\alpha}^{\beta} S(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} u_n(x) dx.$$

Перелічені властивості рівномірно збіжних рядів дають змогу ефективно використовувати їх при наближених обчисленнях.

Приклад. Дослідити на рівномірну збіжність ряд

$$\frac{\cos x}{1^3} + \frac{\cos 2x}{2^3} + \dots + \frac{\cos nx}{n^3} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}.$$

Розв'язання. Скористаємось ознакою Вейерштрасса. Оскільки при $x \in (-\infty, +\infty)$ і $n \in N$

$$\left| \frac{\cos nx}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3} \text{ і ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

збіжний (як узагальнений гармонічний ряд з $\alpha = 3 > 1$), то заданий функціональний ряд абсолютно і рівномірно збіжний на всій числовій осі.